UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA Année Universitaire 2019-2020

ALGEBRE LINEAIRE : MATRICES

1-Definitions

On appelle matrice de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{R}$ un tableau de n.p éléments de r rangés sur n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

En abrégé, on note A = $(a_{ij})_{1\le i\le n\ 1\le j\le p}$

On désigne par $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$, à n lignes et p colonnes.

Cas particuliers :

- Si n = p, on dit que la matrice est carrée
- Si n = 1, $M_{1,p}$ est l'ensemble des matrices lignes
- Si p = 1, $M_{n,1}$ est l'ensemble des matrices colonnes
- Si les coefficients sont tels que a_{ij} = 0 pour i > j, on dit que la matrice est triangulaire supérieure.

2. Matrice associée à une application linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement

Soit B =$\{e_1, \ldots , e_p\}$ une base de E et B′=$\{e'_1, \ldots , e'_n\}$ une base de F

Soit f ∈ L(E,F) et on pose f(e_j) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ e'_i$

On définit une matrice M = $(a_{ij})_{1\le i\le n\ 1\le j\le p}$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_p) \end{array} & \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \end{array}$$

<u>M est appelée la matrice associée à f dans les bases B et B′</u> . On la note $M_{BB'}$(f).

Remarque : la matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies (B et B′)

Exercice 1 *:*

Soit f : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2)$

$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2)$

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire f ∈ £(R3))
2) Déterminer la matrice associée à f dans la base canonique.

Exercice 2 :

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

Soit B et B′ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$

La matrice associée à f dans les bases B et B′ est :

$M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

Déterminer l'expression analytique de f

Théorème :

L'application qui à f $\in$ L(E,F) fait correspondre $M_{BB'}(f)$ est bijective.

3. <u>Opérations sur les matrices</u>

3.1. Addition interne et multiplication externe

Soit A = $(a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ et B = $(b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Alors A + B = $(a_{ij} + b_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Et, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda A = \left(\lambda a_{ij}\right) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

Exemples :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & -2 \\ 10 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -3 & -5 & 1 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 2A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 6 \\ -4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2. Produit de deux matrices

Soit E, F , G trois espaces vectoriels de bases respectives B =$\{e_1, \dots , e_p\}$, B'=$\{e'_1, \dots, e'_n\}$ et B''=$\{e''_1, \dots, e''_n\}$

f : E $\to$ F de matrice associée $M_{BB'}(f) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

g: F $\to$ G de matrice associée $M_{B'B''}(g) \in M_{p,m}(\mathbb{R})$.

(g$\circ$f)$\in$ L(E,G), on détermine la matrice associée de cette application linéaire.

$(g\circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ e'_i\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\ g(e'_j) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{kj}\ e''_k\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} b_{kj}\, a_{ji}\ e''_k$

On pose $a_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\, a_{ji}$

Donc $(g\circ f)(e_i) = \sum_{k=1}^{p} c_{ki}\ e''_k$

La matrice associée à (g$\circ$f) est $M_{BB''}(g\circ f) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$.

Remarque :

Pour que le produit existe, il faut que l'on ait $M_{p,m} \times M_{m,n} = M_{p,n}$

En pratique : $M_{BB''}(g\circ f) = M_{B'B''}(g) \times M_{BB'}(f)$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots \\ \cdots & a_{2i} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{mi} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{kn} & b_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ki} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = M_3$$

Exemple

A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de AxB :

$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : $A\times B \neq B\times A$

Dans le cas précédent $A\times B \in M_{2,2}$ et $B\times A \in M_{3,3}$

Donc $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

3.3. Propriétés

Si les produits sont définis :

- $A\times (B\times C) = (A\times B)\times C$
- $A\times (B + C) = (A\times B) + (A\times C)$
- $(B + C)\times A = (B\times A) + (C\times A)$
- $\forall \lambda \in K,\ \lambda(A \times B) = (\lambda A)\times B$

Cas des matrices carrées :

- L'ensemble des matrices carrées est $M_n(\mathbb{R})$
- $M_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n^2
- <u>Les 4 propriétés précédentes sont valables</u>
- $\exists (A,B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ telles que $A \neq 0$, $B \neq 0$ et $AxB = 0$

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A \neq 0$, $B \neq 0$ et $A\times B = 0$

- Formule de Newton

Lorsque A et B commutent, c'est-à-dire lorsque AxB = BxA, alors :

$$(A + B)^n = \sum_{p=1}^{n} C_n^p A^p B^{n-p}$$

$$\text{où} \quad (A + B)^n = \underbrace{(A + B)x(A + B)x \ldots x(A + B)}_{n\ fois}$$

Définition :

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A\times B = B\times A = I_n$

B est dite inverse de A et se note $\mathbf{A^{-1}}$

Remarque : I_n est la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Propriétés de la matrice identité :

- $A \times I_n = I_n \times A = A$
- I_n est inversible : $I_n = I_n^{-1}$

Méthode pour trouver l'inverse d'une matrice :

Exemple *:* trouver l'inverse de

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

On cherche $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times B = I_2$

Or, $A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ 2a - c & 2b - d \end{pmatrix}$

Donc, par identification $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2a - c = 0 \\ 2b - d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = -1 \end{cases}$

Théorème :
Soit f une application linéaire de E dans F et A = $M_{BB'}(f)$ avec B une base de E et B′ une base de F. A est inversible si et seulement si f est un isomorphisme de E dans F et $A^{-1} = M_{B'B}(f^{-1})$

Théorème :
Soit A∈ $M_n(\mathbb{R})$. A est inversible si et seulement si la famille des vecteurs colonnes de A est une base de E.

Exercice 3 :
Montrer que la matrice A∈$M_n(\mathbb{R})$ suivante est inversible.

A = $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ avec $a_{ii} \neq 0$, ∀ i.

Théorème :
Si A et B sont des matrices inversibles dε $M_n(\mathbb{R})$, alors A× B est inversible et $(A\times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

4. Changement de base

4.1. Formule matricielle de Y = AX

Soit f ∈ L(E,F) avec dim E = n et dim F = p

A = $(a_{ij})_{1\leq i\leq n\ 1\leq j\leq p}$ matrice associée à f.

Soit x = $\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ avec B =$\{e_1, \dots , e_p\}$ base de E et y = f(x) = $\sum_{i=1}^{p} x_i e'_i$ avec B′=$\{e'_1, \dots, e'_n\}$ base de F.

$f(x) = f(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \,(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ e'_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_j\, a_{ij} e'_i$

Donc $y_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}$

A x et y, on fait correspondre deux vecteurs colonnes X et Y et on a la matrice A suivante :

X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Y = $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ et A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$ ⇒ Y = A X

Exercice 4 :

Soit f : $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1 , x_2 , x_3 , x_4) \rightarrow (y_1 , y_2 , y_3)$

avec

$y_1 = 2x_1 - x_2 + x_3$
$y_2 = 3x_2 - x_3 + x_4$
$y_3 = x_1 - x_2 + x_3 + x_4$

1) Déterminer la matrice A associée à f.
2) Déterminer Ker(f)

4.2. Matrice de passage

Définition :
Soit B =$\{e_1, \dots , e_p\}$ et B′=$\{e'_1, \dots, e'_n\}$ des bases de E.
B s'appelle ancienne base de E et B' nouvelle base de E. On a $e'_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j$,∀j pour 1≤ j ≤ n
On appelle matrice de passage de B à B' la matrice P = $(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ dont les colonnes sont constituées des coordonnées des nouveaux vecteurs e'_j écrites dans l'ancienne base.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{array}$$

Proposition :
Soit E un espace vectorielle de dimension p, alors :
• Toute matrice de passage est inversible
• Si $P_{BB'}$ est la matrice de passage de B à B′ alors $(P_{BB'})^{-1}$ est la matrice de passage de B' à B
et $(P_{BB'})^{-1} = P_{B'B}$

4.3. Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur
Proposition :
Soit P la matrice de passage de B à B′.
$\forall x \in E$, soit X le vecteur colonne des coordonnées de x dans l'ancienne base B et X′ le vecteur colonne de x dans la nouvelle base B′. Alors $X' = P^{-1}X$

4.4 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire
Proposition :
Soit E et F deux espace vectoriels ayant pour anciennes bases respectivement B_E et B_F.
Soit B_E' et B_F' deux nouvelles bases de E et F.
Soit P la matrice de passage de B_E à B_E' et Q la matrice de passage de B_F à B_F'.
Pour toute application linéaire de E dans F, soit M sa matrice associée dans les anciennes bases (B_E et B_F).
Alors, la nouvelle matrice N dans les nouvelles bases (B_E' et B_F') est donnée par la formule suivante :
$N = Q^{-1}MP$ (= formule de changement de base)

Corollaire :
Soit f un endomorphisme de E, M sa matrice associée dans l'ancienne base B et N sa matrice associée dans la nouvelle base B'.
Soit P la matrice de passage de B à B′.
Alors $N = P^{-1}MP$

Remarque : dans la matrice de passage, on écrit les éléments de la nouvelle base en fonction des éléments de l'ancienne base.

Remarques :
• $N = P^{-1}MP$
$PN = PP^{-1}MP = IMP \Rightarrow PNP^{-1} = M$
• Si N est une matrice diagonale :
$M^n = (PNP^{-1})^n = \underbrace{PNP^{-1} x PNP^{-1} x \ldots x\, PNP^{-1}}_{\text{n fois}}\lambda$

$M^n = PN^nP^{-1}$

Comme N est diagonale $N = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$

Donc, $N^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_p^n \end{pmatrix}$. On effectuera alors le calcul de M^n.

5. Rang d'une matrice

Définition :

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle rang de A le rang du système composé par ses vecteurs colonnes.

Théorème :

Le rang de A est le rang de toute application linéaire représentée par A.

6. Matrices particulières

Définition :

Si A = $(a_{ij})_{1\leq i\leq n\ 1\leq j\leq p}$, la transposée de A, notée $\mathbf{{}^tA}$ est la matrice ${}^tA = (a_{ji})_{1\leq j\leq p\ 1\leq i\leq n}$

Propriétés :

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$
- ${}^t({}^tA) = A$
- ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA$
- ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$
- $rg({}^tA) = rg(A)$

On dit que A est symétrique si et seulement si ${}^tA = A$

On dit que A est antisymétrique si et seulement si ${}^tA = - A$